Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS OPTICIEN LUNETIER • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Démarrage d'un train à très haute vitesse et aire d'une pièce de gare (13 questions) **Page 3**

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse (13 questions) **Page 8**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 13**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsol.fr/assets/annales/bts-ol/E2 - Mathématiques/2018/BTS OL - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Démarrage d’un train à très haute vitesse et aire d’une pièce de gare

On étudie le départ d’un wagon propulsé électromagnétiquement afin de vérifier s’il atteint la vitesse visée, à l’aide d’une équation différentielle puis de l’étude de sa distance et de sa vitesse. Le schéma d’une pièce destinée à une gare sert ensuite à calculer son aire par intégration et symétrie.

A. Résolution d’une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l’équation différentielle homogène (E0) : y' - 0,2y = 0.

On compare avec l’équation type $y' + ay = 0$: ici $a = -0,2$. Ses solutions sont $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ainsi, sur $[0, +\infty[$, les solutions sont les fonctions exponentielles de la forme indiquée ci-dessous.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie sur [0, 3] par g(t) = -15t - 75 est une solution de l’équation différentielle (E) : y' - 0,2y = 3t.

On dérive g : $g'(t) = -15$. En remplaçant dans le membre de gauche de (E), on obtient $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = 3t$. C’est bien le membre de droite de l’équation différentielle, donc g est une solution sur $[0, 3]$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> g est une solution de (E) sur $[0, 3]$.

Question 3°. Déduire l’ensemble des solutions de l’équation différentielle (E) : y' - 0,2y = 3t.

Les solutions de l’équation homogène associée sont $ke^{0,2t}$, et une solution particulière de (E) est $g(t) = -15t - 75$. Toute solution de (E) est la somme de cette solution particulière et d’une solution de l’équation homogène. La constante k parcourt $\mathbb{R}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Déterminer la fonction f solution de (E) vérifiant la condition initiale f(0) = 0, sachant qu’au temps t = 0 le wagon est au point de départ.

Dans la solution générale, la condition initiale donne $f(0) = k - 75 = 0$, puisque $e^0 = 1$. On trouve donc $k = 75$. En remplaçant cette constante dans la solution générale, on obtient la fonction distance qui vérifie à la fois l’équation différentielle et la condition de départ.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir des expressions de f(t) et de f'(t) fournies par le logiciel de calcul formel, résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

Le calcul formel donne $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Ainsi, $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$, puis à $0,2t \geq 0$, car l'exponentielle est croissante. Cette dernière inégalité est vérifiée pour tout $t \in [0, 3]$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$.

Question 1° b). Déduire du signe de f'(t) les variations de la fonction f sur l'intervalle [0, 3].

La dérivée est nulle en $t = 0$, puis strictement positive sur $]0, 3]$. La fonction f est donc croissante sur $[0, 3]$. Ses valeurs aux bornes sont $f(0) = 0$ et $f(3) = 75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16,659$.

Variations de f

t	0	3
f'(t)	0	+ sur]0,3]
f(t)	0	↗ 16,659

f est croissante sur [0,3].

✓ RÉPONSE À RETENIR

f croît de 0 à $75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16,659$ sur $[0, 3]$.

Question 2°. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième.

Au bout d'une minute, la distance parcourue est $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15 \approx 1,605$ km. En arrondissant au dixième de kilomètre, on obtient $1,6$ km.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$1,6$ km.

Question 3° a). La vitesse du wagon à l'instant t est donnée en kilomètres par minute par f'(t). Déterminer sa vitesse à t = 2 minutes et arrondir au dixième.

La vitesse en kilomètres par minute est $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. À $t = 2$, elle vaut $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1) \approx 7,377$ km·min⁻¹. L'arrondi au dixième donne $7,4$ km·min⁻¹.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $7,4$ km·min⁻¹.

Question 3° b). Dire si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse au regard de la vitesse instantanée de 400 km·h⁻¹ à atteindre en moins de deux minutes.

La vitesse est croissante car $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$ est croissante. À 2 minutes, elle vaut environ $7,377$ km·min⁻¹, soit $7,377 \times 60 \approx 442,6$ km·h⁻¹. Elle dépasse donc 400 km·h⁻¹ à 2 minutes, et le seuil a été atteint auparavant, donc en moins de 2 minutes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, la vitesse de 400 km·h⁻¹ est atteinte avant 2 minutes.

Question 4°. Choisir parmi les trois propositions l'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2, puis recopier la réponse sans justification.

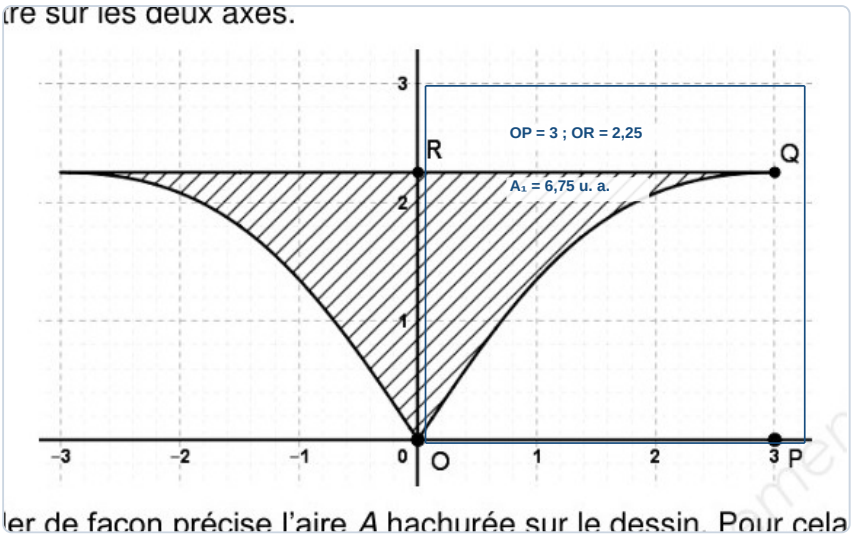
La tangente au point d'abscisse 2 a pour pente $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$ et passe par $(2, f(2))$. Parmi les trois propositions, l'équation correspondante est la troisième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question 1°. À l'aide du schéma, choisir parmi les trois propositions l'aire A1 du rectangle OPQR : 3 u. a., 5,25 u. a. ou 6,75 u. a.

Sur le schéma, le rectangle $OPQR$ a pour largeur $OP = 3$ et pour hauteur $OR = 2,25$. Son aire est donc $A_1 = 3 \times 2,25 = 6,75$ unités d'aire. C'est la troisième proposition.



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$A_1 = 6,75$ u. a.

Question 2°. Calculer l'aire A2 de la partie du plan délimitée par la courbe de g(x) = 27x/(2x² + 18), l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 3, en utilisant la primitive fournie.

Comme g est positive sur $[0, 3]$, l'aire cherchée est $\int_0^3 g(x)\,dx$. Avec la primitive fournie, $G(x) = \frac{27}{4}\ln(x^2 + 9)$, on obtient $A_2 = G(3) - G(0) = \frac{27}{4}\ln(18/9) = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

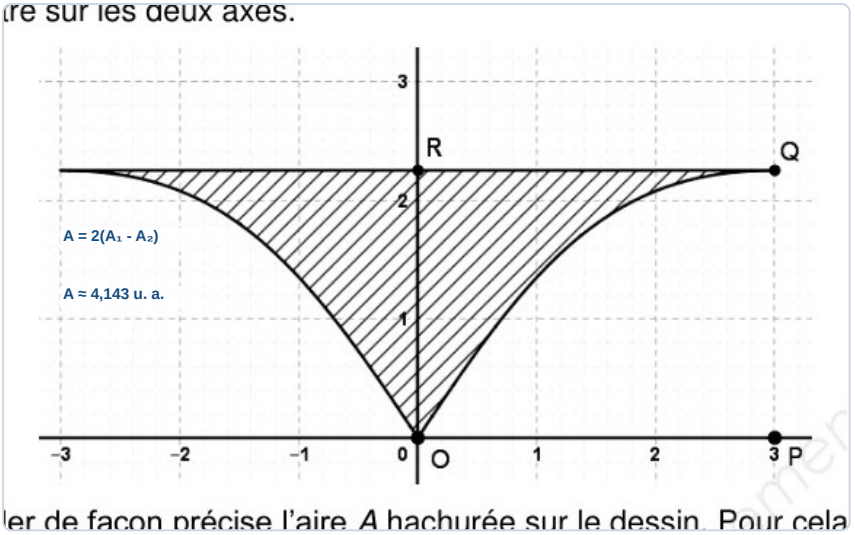
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire A de la pièce hachurée représentée sur le schéma et arrondir le résultat au millième.

La pièce est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. D'un côté, l'aire hachurée est l'aire du rectangle moins l'aire sous la courbe, soit $A_1 - A_2$. Ainsi, $A = 2(A_1 - A_2) = 2(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2) \approx 4,143$ u. a., au millième près.

Aire totale par symétrie



✓ RÉPONSE À RETENIR

$A \approx 4,143$ u. a.

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse

L'exercice examine les obsolescences technique et logicielle dans une population de smartphones, puis modélise par une loi binomiale le nombre d'appareils non réparables dans un lot. Il se termine par un test bilatéral destiné à vérifier, à partir d'un échantillon de 180 personnes, un sondage concernant la marque B.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des informations de l'énoncé sur les 200 smartphones, compléter le tableau d'effectifs croisant les obsolescences technique et logicielle, avec les totaux.

Sur 200 smartphones, 3 % correspondent à 6 appareils touchés par T et 8 % à 16 touchés par L. Parmi les 16 appareils touchés par L, 12,5 % sont aussi touchés par T, soit 2. On complète les autres cases par différence, puis on vérifie que chaque ligne et chaque colonne donne le total correspondant.

Smartphones	Touchés par L	Non touchés par L	Total
Touchés par T	2	4	6
Non touchés par T	14	180	194
Total	16	184	200

Effectifs croisés des obsolescences

Smartphones	Touchés par L	Non touchés par L	Total
Touchés par T	2	4	6
Non touchés par T	14	180	194
Total	16	184	200

Effectifs sur 200 smartphones.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Effectifs croisés : 2, 4, 14 et 180. Totaux : 6, 194, 16, 184 et 200.

Question 2°. Pour un smartphone prélevé au hasard, donner P(T), P(L) et P_L(T), où T désigne l'obsolescence technique et L l'obsolescence logicielle.

Les pourcentages de l'énoncé donnent directement les probabilités de T et de L. La probabilité conditionnelle demandée est la proportion des smartphones touchés par T parmi ceux touchés par L. On convertit chaque pourcentage en nombre décimal : 3 % vaut 0,03, 8 % vaut 0,08 et 12,5 % vaut 0,125. Il ne faut pas inverser le conditionnement : ici, L est l'événement réalisé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0{,}03$, $P(L) = 0{,}08$ et $P_L(T) = 0{,}125$.

Question 3° a). Calculer P(T ∩ L), la probabilité qu'un smartphone soit touché à la fois par l'obsolescence technique et par l'obsolescence logicielle.

La probabilité conditionnelle donnée dans l'énoncé s'écrit $P_L(T) = P(T \cap L)/P(L)$. On en déduit directement $P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T)$. Avec les valeurs précédentes, cela donne $0{,}08 \times 0{,}125 = 0{,}01$. L'intersection concerne donc 1 % des smartphones, soit 2 appareils parmi les 200 du tableau.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T \cap L) = 0{,}010$.

Question 3° b). Calculer P(T ∪ L), la probabilité qu'un smartphone soit touché par au moins un des deux types d'obsolescence.

L'événement $T \cup L$ signifie qu'au moins l'un des deux types d'obsolescence est présent. En additionnant $P(T)$ et $P(L)$, l'intersection est comptée deux fois : il faut donc la soustraire une fois. Ainsi, $P(T \cup L) = 0{,}03 + 0{,}08 - 0{,}01 = 0{,}10$. Cela correspond aux 20 smartphones touchés par T ou L dans la population de 200.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T \cup L) = 0{,}100$.

Question 3° c). Calculer P_T(L), la probabilité qu'un smartphone soit touché par l'obsolescence logicielle sachant qu'il est touché par l'obsolescence technique.

On cherche la probabilité d'être touché par L sachant que T est réalisé. Le dénominateur est donc $P(T) = 0{,}03$, et non $P(L)$. La probabilité de l'intersection vaut $0{,}01$, d'où $P_T(L) = P(T \cap L)/P(T) = 0{,}01/0{,}03 = 1/3$. Arrondie au millième comme demandé dans l'exercice, cette probabilité vaut 0,333.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P_T(L) \approx 0{,}333$.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que X, variable aléatoire qui compte les smartphones non réparables dans un lot de 50, suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.

Chaque prélèvement est assimilé à un tirage avec remise : les tirages sont indépendants et la probabilité de non-réparabilité reste constante, égale à 0,045. X compte le nombre de smartphones non réparables parmi 50 tirages. Il compte donc les succès d'une répétition de 50 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}045$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0{,}045)$.

Question 2°. Calculer la probabilité que tous les smartphones d'un lot de 50 soient réparables.

Tous les smartphones sont réparables lorsque le nombre de smartphones non réparables est nul, c'est-à-dire lorsque $X = 0$. La probabilité qu'un smartphone soit réparable est $1 - 0{,}045 = 0{,}955$. Les 50 tirages étant indépendants, la probabilité que chacun des 50 appareils soit réparable est donc $0{,}955^{50}$. On arrondit le résultat au millième, comme indiqué dans l'énoncé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 0) = 0{,}955^{50} \approx 0{,}100$.

Question 3° a). Faire tourner à la main l'algorithme fourni, puis compléter le tableau pour i = 0, 1, 2 et 3 avec les valeurs de P(X = i) et les valeurs successives de S.

Pour chaque valeur de i, on calcule $P(X = i)$, puis on l'ajoute à la somme S obtenue à l'étape précédente. Le tableau reprend les probabilités et les sommes successives, arrondies au millième. Les valeurs de S sont cumulatives : après le passage i, S vaut $P(X \leq i)$. Ces calculs utilisent la loi binomiale de paramètres 50 et 0,045.

i	**0**	**1**	**2**	**3**
$P(X = i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

Valeurs obtenues avec l'algorithme

i	**0**	**1**	**2**	**3**
P(X = i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

Valeurs arrondies au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X = i)$: 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. S : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat.

La boucle additionne les probabilités pour les valeurs de X allant de 0 à 3. À la fin, S est donc la probabilité qu'un lot contienne au plus trois smartphones non réparables : $S = P(X \leq 3)$. La dernière valeur du tableau de la question précédente est 0,813. Dans le contexte, environ 81,3 % des lots répondent à cette condition.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$S = P(X \leq 3) \approx 0{,}813$, soit 81,3 % des lots.

Question 4°. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte des lots de smartphones.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut $E(X) = np$. Ici, $E(X) = 50 \times 0{,}045 = 2{,}25$. Cette espérance représente le nombre moyen de smartphones non réparables dans un lot de 50, lorsque l'on considère un grand nombre de lots. Elle n'impose pas qu'un lot particulier contienne exactement 2,25 appareils.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(X) = 2{,}25$ smartphones non réparables en moyenne par lot.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Sous l'hypothèse nulle H0, choisir parmi 0,05, 0,06 et 0,07 la valeur de h arrondie au centième telle que P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95.

Sous H_0, l'écart-type de F vaut 0,037. Pour une loi normale, l'intervalle central de 95 % s'étend à environ 1,96 écart-type de la moyenne. Ainsi, $h \approx 1{,}96 \times 0{,}037 = 0{,}07252$. Arrondi au centième, h vaut 0,07. Parmi les trois choix proposés, la réponse correspondante est donc 0,07.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h \approx 0{,}07$.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %.

Au seuil de 5 %, on retient l'intervalle central associé à $h \approx 0{,}07$. Sous l'hypothèse nulle, la fréquence observée doit être comparée aux bornes $0{,}55 - 0{,}07 = 0{,}48$ et $0{,}55 + 0{,}07 = 0{,}62$. Une fréquence dans cet intervalle conduit à ne pas rejeter H_0. Une fréquence en dehors de l'intervalle conduit à rejeter H_0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ne pas rejeter H_0 si $F \in [0{,}48\,;\,0{,}62]$; la rejeter sinon.

Question 3°. Dans l'échantillon de 180 personnes, 76 déclarent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. Déterminer la conclusion du test.

La fréquence observée dans l'échantillon est $76/180 \approx 0{,}422$. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle de décision. Elle se situe donc dans la région de rejet du test bilatéral. Au seuil de 5 %, les données de l'échantillon ne sont pas compatibles avec l'hypothèse $p = 0{,}55$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

On rejette H_0 au seuil de 5 % : le sondage à 55 % n'est pas confirmé.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2018, code MATGRB1, d'une durée de deux heures et dotée d'un coefficient variant selon la spécialité. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, étudient le démarrage d'un train à très haute vitesse et l'obsolescence programmée des smartphones. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, fonctions, calcul intégral, probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = 0, les solutions sont y(t) = k e^(-at) ; on ajoute une solution particulière pour résoudre l'équation avec second membre.
- La dérivée de la distance par rapport au temps donne la vitesse ; convertir les unités avant de comparer km/min et km/h.
- Pour X suivant une loi binomiale de paramètres n et p, P(X = i) = C(n,i)p^i(1-p)^(n-i) et E(X) = np.
- Dans un test bilatéral, la fréquence observée se compare à l'intervalle d'acceptation construit sous l'hypothèse nulle.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la solution de l'équation homogène d'une solution particulière, puis appliquer la condition initiale.
- Convertir la vitesse en km/min vers les km/h requis avant de vérifier l'objectif du train.
- Vérifier que les totaux du tableau croisé concordent avec les données et l'effectif de 200 smartphones.
- Pour le test, calculer la fréquence 76/180 et appliquer la règle de décision au seuil de 5 %.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment obtenir les solutions de l'équation différentielle avec un second membre ?

Résolvez d'abord l'équation homogène associée, puis ajoutez à sa solution générale une solution particulière de l'équation complète. Utilisez enfin la condition initiale pour déterminer la constante.

Q : Comment calculer l'aire hachurée à partir du dessin et de la primitive ?

Repérez les surfaces indiquées sur le schéma, calculez l'intégrale de g entre 0 et 3 avec la primitive fournie, puis combinez les aires en tenant compte de la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Q : Quelle est la durée de l'épreuve et comment les points sont-ils répartis ?

L'épreuve dure deux heures et comporte deux exercices, chacun noté sur 10 points. Les trois parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment, ce qui permet d'organiser le travail selon les questions maîtrisées.

Q : Quel critère permet de conclure au test d'hypothèse ?

Au seuil de 5 %, comparez la fréquence observée à l'intervalle d'acceptation déterminé sous H0. Si elle est dans cet intervalle, on ne rejette pas H0 ; sinon, on la rejette.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsol.fr/assets/annales/bts-ol/E2 - Mathématiques/2018/BTS OL - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Opticien Lunetier : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.