Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS OPTICIEN LUNETIER • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine : équation différentielle, étude de fonction et étude locale (12 questions) **Page 3**

2. Production de tubes fluorescents, durée de fonctionnement et conformité de rivets (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsol.fr/assets/annales/bts-ol/E2 - Mathématiques/2022/BTS OL - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine : équation différentielle, étude de fonction et étude locale

Un chariot de fête foraine se déplace initialement à 20 m/s sur un axe horizontal puis ralentit sous l'effet d'un système de freinage. Sa vitesse est étudiée au moyen d'une équation différentielle, des variations d'une fonction, d'une intégrale de distance et d'un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. **Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.**

La formule donnée pour $y' + ay = 0$ donne les solutions $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, $a = 0,8$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. **Soit g définie par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.**

1. $g(t) = 5$, donc $g'(t) = 0$.
2. Alors $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$, égal au second membre de l'équation.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> g est bien une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1. c. **Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.**

Les solutions de l'équation complète s'obtiennent en ajoutant la solution particulière constante $g(t) = 5$ aux solutions de l'équation homogène associée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

Dans la solution générale, $f(0) = 5 + k = 20$, car $e^0 = 1$. Il vient $k = 15$, d'où la solution qui vérifie la condition initiale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5, sachant que f(t) = 15e^(-0,8t) + 5.

Lorsque $t \to +\infty$, $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Ainsi, dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend vers zéro et la limite est la constante restante.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +fty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, puis donner une équation de cette asymptote.

> Une limite finie en $+\infty$ donne une asymptote horizontale d'ordonnée égale à cette limite. Ici, la limite trouvée est 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. En utilisant f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Comme l'exponentielle est toujours positive, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ sur $[0; +infty[$. La fonction décroît de $f(0) = 20$ vers sa limite 5.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	–	
Variation de f	20	↘ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement décroissante de 20 vers 5.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour s'arrêter, le chariot devrait atteindre une vitesse nulle. Or, pour tout $t \geq 0$, le terme exponentiel est positif :

- $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$;
- la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$, sans atteindre zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, le système de freinage ne permet pas au chariot de s'arrêter.

Question 4. a. **Soit F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est exactement $f(t)$, donc F est une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4. b. **À l'aide de l'intégrale de f, calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

1. La distance vaut $d = F(1) - F(0)$.
2. Donc $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$.
3. Au centimètre près, cela donne $15,33$ m.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Parmi les propositions, recopier le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro qui est exact. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Au voisinage de zéro, $e^{-0,8t} = 1 - 0,8t + \frac{0,8^2}{2}t^2 + o(t^2)$. Ainsi, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = 20 - 12t + 4,8t^2 + o(t^2)$. Parmi les propositions, cela correspond à celle qui écrit le reste sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en $t = 0$ est $y = f(0) + f'(0)t$. Or $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 12t$.

2. Production de tubes fluorescents, durée de fonctionnement et conformité de rivets

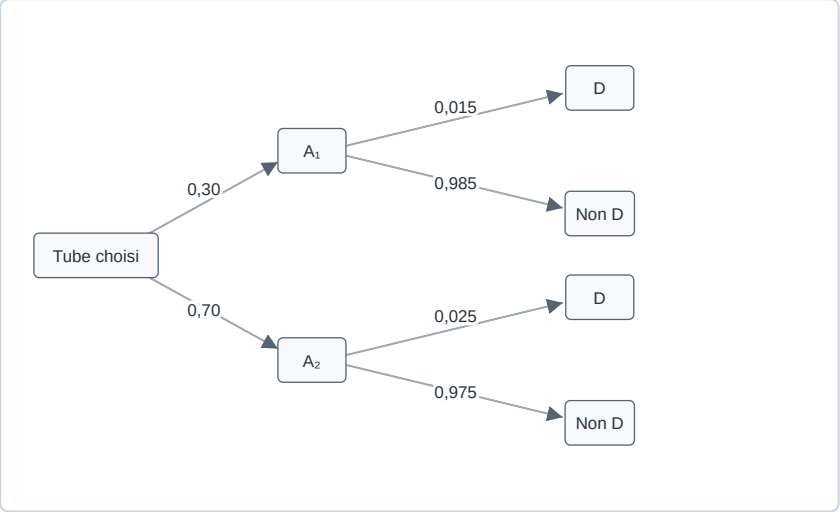
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers, où les taux de défaut diffèrent, et modélise leur durée de bon fonctionnement par une loi exponentielle. L'exercice étudie aussi la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon de 1 000 rivets.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation de production des deux ateliers et la présence ou l'absence d'un défaut sur un tube choisi au hasard.

La première étape distingue les deux ateliers. Depuis chaque atelier, on indique la probabilité conditionnelle d'un défaut, puis celle de son absence, qui lui est complémentaire.

Production et défauts des tubes



Probabilités des ateliers et probabilités conditionnelles de défaut indiquées dans l'énoncé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Atelier 1 : 0,30 ; atelier 2 : 0,70. Défaut : 0,015 et 0,025 ; absence de défaut : 0,985 et 0,975.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

La probabilité conjointe s'obtient en multipliant la probabilité de choisir l'atelier 1 par la probabilité conditionnelle d'un défaut dans cet atelier : $P(A_1 \cap D) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube présente un défaut est P(D) = 0,022.**

1. Les ateliers couvrent toute la production, donc $P(D) = P(A_1 \cap D) + P(A_2 \cap D)$.
2. Ainsi, $P(D) = 0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,022$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'un tube présente un défaut est $P(D) = 0,022$.

Question 4. **Sachant que le tube ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

Probabilité	Calcul
Atelier 2 et sans défaut	$0,70 \times 0,975 = 0,6825$
Sans défaut	$1 - 0,022 = 0,978$

La probabilité demandée est le quotient de ces valeurs : $P(A_2 \mid \overline{D}) = 0,6825/0,978$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit environ 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T, exprimée en heures, suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,001$, la formule de l'énoncé donne $E(T) = 1/\lambda = 1/0,001 = 1\,000$. La durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube est donc de 1 000 heures.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures : c'est la durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. **Calculer, avec un résultat arrondi à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

1. La formule donnée est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
2. Avec $\lambda = 0,001$ et $t = 8\,000$, on obtient $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0,001 \times 8\,000} \approx 0,9997$.
3. Au centième, cela donne 1,00.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 1,00$.

Question 3. Calculer, avec un résultat arrondi à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

La probabilité de dépasser une durée donnée est la fonction de survie de la loi exponentielle : $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0,0000454$. Arrondie au centième, cette probabilité vaut 0,00.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0,00$ au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Dans un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

Rivets conformes	Rivets prélevés	Fréquence observée
975	1 000	$975/1\,000 = 0,975$

La fréquence observée dans l'échantillon constitue l'estimation ponctuelle de la proportion de rivets conformes dans toute la production.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f = 0,975$, soit 97,5 %.

Question 2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur f pour la proportion p au niveau de confiance de 95 %, en utilisant la formule fournie et en arrondissant les bornes à 10^{-3} près.

1. La marge d'erreur fournie est $1,96\sqrt{0,975(1-0,975)/1\,000} \approx 0,009677$.
2. L'intervalle centré sur f est $[0,975 - 0,009677\ ;\ 0,975 + 0,009677]$.
3. Arrondies au millième, les bornes sont 0,965 et 0,985.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, dure 2 heures et son coefficient est 2, sauf pour Traitement des matériaux où il est 3. Elle comporte deux exercices de 10 points sur le freinage d'un chariot, la production de tubes fluorescents et la conformité de rivets. Les compétences évaluées incluent équations différentielles, fonctions, probabilités et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont de la forme y(t) = ke^(-at).
- Si f(t) tend vers une limite finie L en +∞, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- Pour T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ et P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt).
- L'intervalle de confiance à 95 % fourni est f ± 1,96√(f(1-f)/n), où f est la fréquence observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la probabilité d'une intersection de la probabilité conditionnelle et préciser l'événement conditionnant.
- Pour une variable exponentielle, reprendre le paramètre λ indiqué : ici λ = 0,001 par heure.
- Pour calculer une distance, appliquer la primitive aux deux bornes et conserver le résultat exact avant l'arrondi demandé.
- Pour l'intervalle de confiance, utiliser f = 975/1000 et n = 1000, puis arrondir les bornes à 10^{-3} près.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du freinage ?

On résout d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, puis on ajoute une solution particulière de l'équation complète. La condition initiale f(0) = 20 permet ensuite de déterminer la constante de la solution.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube sans défaut provienne de l'atelier 2 ?

On calcule la probabilité conditionnelle $P(A_2 \mid \text{non D})$, égale à $P(A_2 \cap \text{non D})$ divisée par P(non D). L'arbre pondéré donne les probabilités des branches nécessaires au calcul de cette intersection.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Le sujet comporte deux exercices notés chacun sur 10 points, avec trois parties indépendantes dans chaque exercice. Répartissez le temps selon les questions, avancez sur celles que vous maîtrisez et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs et arrondis.

Q : Quels arrondis faut-il respecter dans ce sujet ?

La distance du chariot est à arrondir au centimètre. Les probabilités liées à la durée des tubes sont arrondies à 10^{-2} et les bornes de l'intervalle de confiance à 10^{-3} près.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsol.fr/assets/annales/bts-ol/E2 - Mathématiques/2022/BTS OL - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Opticien Lunetier : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.