Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS OPTICIEN LUNETIER • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot freiné (12 questions) **Page 3**

2. Signaux d'un système électrique et transformations de Laplace (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsol.fr/assets/annales/bts-ol/E2 - Mathématiques/2022/BTS OL - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot freiné

Un chariot de fête foraine lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée en fonction du temps. L'exercice porte sur une équation différentielle, l'étude de la fonction vitesse et de la distance parcourue, puis sur le développement limité et la tangente en zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

On compare l'équation à la forme donnée dans le sujet : $y' + ay = 0$. Ici, $a = 0,8$, donc les solutions sont de la forme $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Elles sont définies et dérivables sur l'intervalle $[0; +\infty[$, comme demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. En la substituant dans le membre de gauche de l'équation, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Le membre de gauche est bien égal au membre de droite pour tout t de l'intervalle : g est donc une solution particulière de l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1.c. Déduire des résultats précédents l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation complète. La différence entre toute autre solution et cette solution particulière vérifie l'équation homogène $y' + 0,8y = 0$. D'après la question précédente, cette différence est de la forme $ke^{-0,8t}$, avec k réel. On obtient ainsi toutes les solutions de l'équation complète.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

La solution générale est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. En utilisant la condition initiale, $f(0) = 5 + k$, car $e^0 = 1$. Comme $f(0) = 20$, on trouve $k = 20 - 5 = 15$. En remplaçant cette constante dans l'expression générale, on obtient la fonction vitesse recherchée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. **Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ vaut 5, sachant que f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5.**

Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. On sait que l'exponentielle tend alors vers zéro : $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, le terme $15e^{-0,8t}$ tend vers zéro et la limite de $f(t)$ est la constante restante.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est finie et vaut 5. La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 5$ en $+\infty$. De plus, le terme exponentiel est positif pour tout t, donc la courbe reste au-dessus de cette asymptote.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. **En utilisant f'(t) = −12e$^{-0,8t}$, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$: la fonction est strictement décroissante. On a $f(0) = 20$, et sa limite en $+\infty$ vaut 5. Le tableau de variation est donc :

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	−	
$f(t)$	20	↘ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Le chariot s'arrêterait si sa vitesse atteignait zéro. Or $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, et le terme exponentiel est strictement positif pour tout temps fini. La vitesse est donc toujours supérieure à 5 m·s⁻¹. Elle tend vers 5 m·s⁻¹ sans jamais atteindre zéro : le système de freinage ne permet pas au chariot de s'arrêter selon ce modèle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse tend vers 5 m·s⁻¹ et ne s'annule jamais.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = −18,75e^{−0,8t} + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par la dérivation d'une exponentielle composée, $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Le coefficient du terme exponentiel vaut 15, donc $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. Ainsi, F est bien une primitive de f sur l'intervalle considéré.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. Sachant que la distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de f entre ces instants, calculer la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$. Donner sa valeur exacte puis une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue entre 0 et 1 est $d = F(1) - F(0)$. Avec la primitive donnée, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. L'évaluation de cette expression donne environ 15,3251 m. Arrondie au centimètre, la distance est donc de 15,33 m.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m, soit $15,33$ m au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. Parmi les propositions, recopier l'expression exacte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le logiciel donne le polynôme régulier $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers zéro. Il faut donc retenir la proposition qui conserve ce terme quadratique et ce reste d'ordre 2.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. La vitesse initiale donne $f(0) = 20$. D'après l'expression de la dérivée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. En reportant ces deux valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient son expression.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Signaux d’un système électrique et transformations de Laplace

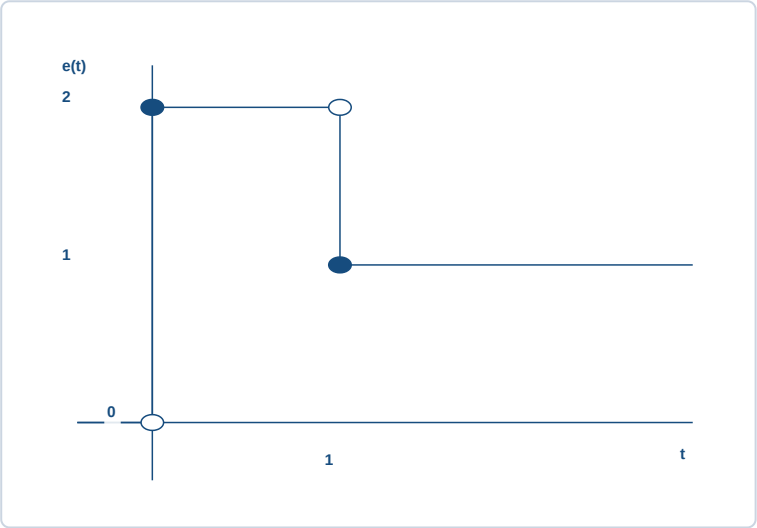
Un système électrique entrée-sortie reçoit le signal e(t) = 2U(t) − U(t − 1) et possède la fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). Les questions étudient les transformées de Laplace, le calcul du signal de sortie s(t) et la représentation graphique des signaux.

Partie A - Signal d’entrée

Question 1. Tracer, sur le document-réponse à rendre avec la copie, la courbe représentative de la fonction e(t).

La définition de l’échelon donne $U(0) = 1$ et $U(0) = U(1 - 1) = 1$. Le signal vaut donc 0 avant $t = 0$, puis 2 de $t = 0$ jusqu’à juste avant $t = 1$. À $t = 1$, le terme $U(t - 1)$ devient égal à 1 : le signal prend alors la valeur 1. Les points pleins et ouverts du tracé indiquent ces valeurs aux sauts.

Courbe du signal d’entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d’entrée e(t).

Par linéarité de la transformation de Laplace, on transforme séparément les deux échelons. Le formulaire donne $\mathcal{L}(U(t)) = 1/p$ et $\mathcal{L}(U(t-1)) = e^{-p}/p$. Comme le second terme est soustrait dans l’expression de $e(t)$, on soustrait aussi sa transformée :

$$E(p) = \frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] − [1/(p(p + 1))]e⁻ᵖ.

La relation entrée-sortie est $S(p) = H(p)E(p)$. Avec $H(p) = 1/(p+1)$ et $E(p) = 2/p - e^{-p}/p$, on multiplie chaque terme par $1/(p+1)$. On obtient ainsi l'expression demandée :

$$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{1}{p(p+1)}e^{-p}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier l'égalité 1/[p(p + 1)] = 1/p − 1/(p + 1).

Mettons le membre de droite au dénominateur commun $p(p+1)$. Le numérateur devient $(p+1) - p = 1$, ce qui donne exactement le membre de gauche. L'égalité est donc vérifiée pour les valeurs de p où les expressions sont définies :

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{(p+1) - p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e⁻ᵖ/p et de e⁻ᵖ/(p + 1), en utilisant le formulaire.

On lit les deux premières inverses directement dans le formulaire. Pour les deux dernières, le facteur e^{-p} correspond à un retard d'une unité : la fonction inverse est décalée d'une unité et multipliée par $U(t-1)$.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition en éléments simples donne $S(p) = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$. Sur $[0;1[$, les termes retardés sont nuls puisque $U(t-1) = 0$. Il reste donc la transformée inverse de $2/p - 2/(p+1)$, soit :

$$s(t) = 2(1 - e^{-t}).$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. Sachant que s(t) = (e − 2)e⁻ᵗ + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis avec une valeur approchée au dixième.

La formule donnée pour $t \geq 1$ s'applique à $t = 1$. En remplaçant t par 1, puis en utilisant $e^{-1} = 1/e$, on obtient la valeur exacte. Son évaluation donne environ $1{,}264$, qui s'arrondit au dixième à $1{,}3$:

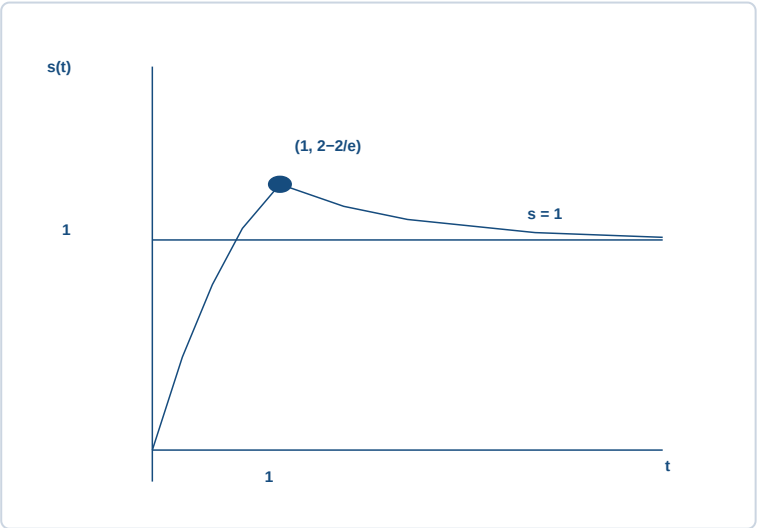
$$s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = 2 - \frac{2}{e}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3.$

Question 5.b. Compléter, sur le document-réponse à rendre avec la copie, la courbe représentative de la fonction s.

Pour compléter le tracé, la courbe part de $(0, 0)$ et suit $2(1 - e^{-t})$ jusqu'à $t = 1$. Elle atteint alors $(1, 2 - 2/e)$, puis suit $1 + (e-2)e^{-t}$. Elle décroît ensuite en restant au-dessus de la droite horizontale $s = 1$, dont elle se rapproche lorsque t augmente.

Courbe représentative du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe atteint son maximum en $(1, 2 - 2/e)$, puis décroît vers l'asymptote horizontale $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, l'expression admise est $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le terme e^{-t} tend vers 0. Le terme constant reste donc seul dans la limite :

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie le freinage d'un chariot et un système électrique, en mobilisant équations différentielles, analyse de fonctions, intégration et transformations de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = b$, une solution générale est la somme d'une solution particulière constante b/a et de la solution homogène ke^{-at}.
- Si $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, alors $f(t)$ tend vers 5 et la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation $y = 5$.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$.
- La transformée de Laplace de $U(t - a)$ est e^{-ap}/p : un décalage temporel de a introduit un facteur exponentiel.

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour l'équation différentielle, vérifier la solution particulière avant de former la solution générale.
- Dans le tableau de variation, indiquer le signe de la dérivée, la valeur initiale et la limite en $+\infty$.
- Pour la distance, calculer la différence des valeurs de la primitive aux bornes et respecter l'arrondi demandé.
- Pour les signaux décalés, appliquer le facteur e^{-ap} et distinguer les intervalles avant et après $t = 1$.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution de l'équation différentielle du freinage ?

Résoudre d'abord $y' + 0,8y = 0$, puis ajouter la solution particulière constante $g(t) = 5$. La condition initiale $f(0) = 20$ permet ensuite de déterminer la constante de la solution générale.

Q : Comment savoir si le chariot finit par s'arrêter ?

Un arrêt correspond à une vitesse nulle. Étudier la limite de $f(t)$ et son signe sur $[0 ; +\infty[$: ici, la vitesse tend vers 5 $m \cdot s^{-1}$ et reste positive, donc le chariot ne s'arrête pas selon le modèle.

Q : Comment organiser les calculs de l'exercice sur les signaux ?

Déterminer $E(p)$, puis utiliser $S(p) = H(p)E(p)$. Décomposer les fractions, appliquer les transformées inverses du formulaire et tenir compte du décalage lié à $U(t - 1)$ pour établir $s(t)$.

Q : Que faut-il faire apparaître sur le graphique du signal de sortie ?

Tracer $s(t)$ avec son expression sur chacun des intervalles, puis placer le point correspondant à $s(1)$. Soigner les axes et faire apparaître le comportement de la courbe lorsque t tend vers $+\infty$.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsol.fr/assets/annales/bts-ol/E2 - Mathématiques/2022/BTS OL - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Opticien Lunetier : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.