Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS OPTICIEN LUNETIER • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - BTS Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour toutes les spécialités sauf Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (14 questions) **Page 3**

2. Magasin de vélos : probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance (10 questions) **Page 8**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsol.fr/assets/annales/bts-ol/E2 - Mathématiques/2023/BTS OL - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond d'un tiroir et le fond du meuble est modélisée par une fonction f du temps, exprimée en centimètres. L'exercice étudie l'équation différentielle de ce modèle, les variations de f, un algorithme de seuil et le développement limité au voisinage de zéro.

Partie A

Question 1. a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Le discriminant vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Il est positif, donc les deux racines sont $r = \frac{-5-3}{2}$ et $r = \frac{-5+3}{2}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -4$ ou $r = -1$.

Question 1. b. Résoudre l'équation différentielle (E₀) : y'' + 5y' + 4y = 0, en utilisant le tableau fourni.

Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et distinctes : -1 et -4. D'après le tableau fourni, la solution générale est une combinaison linéaire des exponentielles correspondantes, avec deux constantes réelles arbitraires.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2. a. À partir de la position initiale du point M et de sa vitesse, déterminer f(0) et f'(0).

La distance initiale entre M et O est de 20 cm, donc $f(0) = 20$. Comme $f(t)$ représente cette distance et que M se rapproche de O à la vitesse négative de -10 cm·s^{-1}, on a $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2. b. En utilisant l'expression admise de f, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On évalue l'expression admise à l'instant $t = 2$: $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. C'est la valeur exacte demandée. Numériquement, elle vaut environ $3{,}157$ cm.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2. (suite). **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Dire si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes et justifier.**

À 4 secondes, $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm, donc $f(4) < 0{,}5$. Comme $f(0) = 20 > 0{,}5$ et que f est continue, elle atteint le seuil avant 4 secondes. Le tiroir est alors fermé selon le critère donné.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le constructeur a raison : le tiroir est fermé avant 4 secondes.

Partie B

Question 1. a. **Sachant que la limite de e^{-u} lorsque u tend vers +∞ est 0, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque $t \to +\infty$, les exponentielles e^{-t} et e^{-4t} tendent toutes deux vers 0. Les deux termes de $f(t)$ tendent donc vers 0, et leur différence aussi.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1. b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant égale à 0, la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$. Cette droite est l'axe des abscisses.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2. a. **Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

On dérive chaque exponentielle en appliquant la règle de dérivation de $e^{u(t)}$, soit $u'(t)e^{u(t)}$. Ainsi, la dérivée du premier terme est $-\frac{70}{3}e^{-t}$, et celle du second terme est $\frac{40}{3}e^{-4t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2. b. **Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

La fonction est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$, puisque $f'(t) < 0$ sur cet intervalle. Son point de départ vaut $f(0) = 20$, et sa limite en $+\infty$ vaut 0.

t	**0**	$+\infty$
$f(t)$	20	0
Sens de variation	$20 \searrow 0$	

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

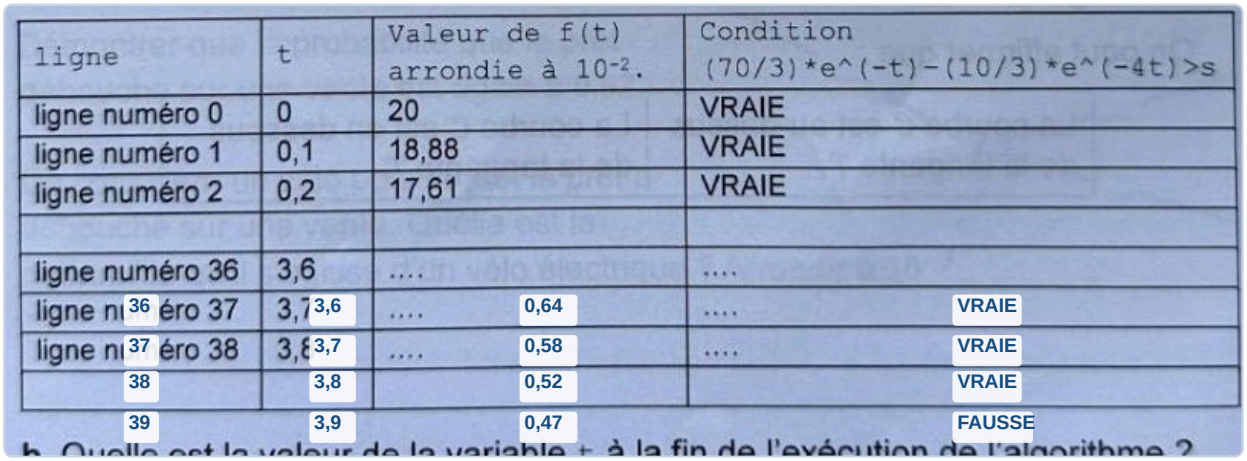
f décroît de 20 vers 0 sur $[0;+\infty[$.

Question 3. a. **Compléter le tableau de suivi de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant si nécessaire des lignes, jusqu'à ce que l'algorithme s'arrête. Indiquer les valeurs de f(t) arrondies à 10^{-2} et si la condition est vraie ou fausse.**

La valeur testée dans la boucle est $f(t)$. Elle doit être strictement supérieure à $0{,}5$ pour que la condition soit vraie. Le pas étant de $0{,}1$, on complète les lignes jusqu'à la première valeur inférieure ou égale au seuil.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

Tableau de l'algorithme complété



ligne	t	Valeur de f(t) arrondie à 10^{-2}.	Condition (70/3)*e^(-t)-(10/3)*e^(-4t)>s
ligne numéro 0	0	20	VRAIE
ligne numéro 1	0,1	18,88	VRAIE
ligne numéro 2	0,2	17,61	VRAIE
ligne numéro 36	3,6	....	....
ligne ni 36 éro 37	3,7 3,6	 0,64	.... VRAIE
ligne ni 37 éro 38	3,8 3,7	 0,58	.... VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

b. Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La condition devient fausse à la ligne 39.

Question 3. b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

L'algorithme augmente t de $0{,}1$ à chaque passage. À $t = 3{,}8$, la condition reste vraie car $f(3{,}8) \approx 0{,}523 > 0{,}5$. À $t = 3{,}9$, elle devient fausse car $f(3{,}9) \approx 0{,}472 < 0{,}5$. Le tiroir est donc fermé au seuil de temps retenu par l'algorithme.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé selon l'algorithme.

Question 4. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

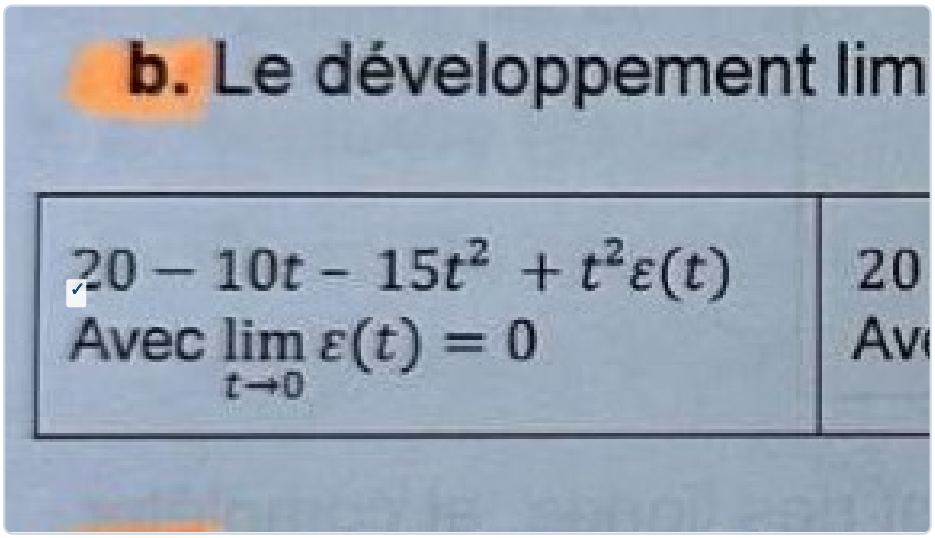
L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. Les conditions initiales donnent $f(0) = 20$ et $f'(0) = -10$. En les remplaçant dans cette formule, on obtient l'équation de T.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> T : $y = 20 - 10t$.

Question 4. b. Parmi les propositions du questionnaire à choix multiples, sélectionner le développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le logiciel donne la partie régulière du développement limité à l'ordre deux : $20 - 10t - 15t^2$. Parmi les propositions, il faut donc retenir celle qui ajoute un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Proposition correcte du développement limité

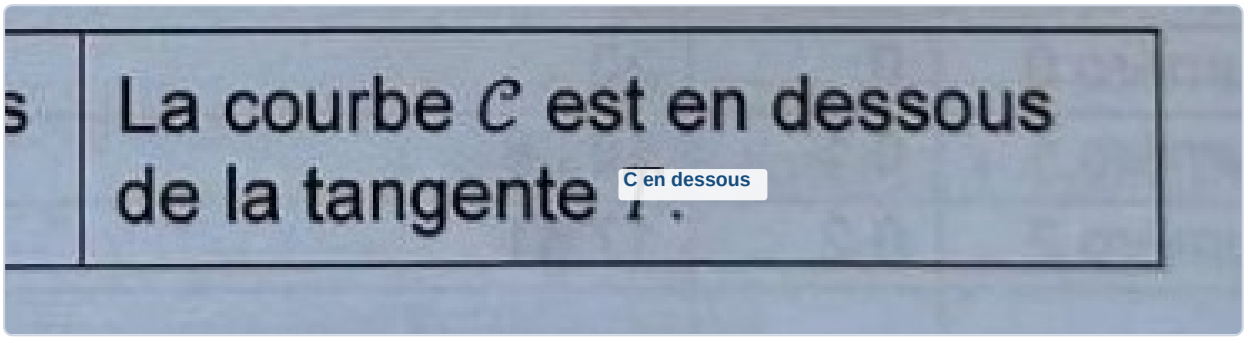


> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Première proposition : $20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$.

Question 4. c. Indiquer, parmi les deux propositions du questionnaire à choix multiples, si la courbe C est au-dessus ou en dessous de sa tangente T au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.

Le développement limité donne $f(t) - (20 - 10t) = -15t^2 + t^2\varepsilon(t)$. Pour $t > 0$ suffisamment proche de 0, cette différence est négative. La courbe est donc située en dessous de sa tangente au voisinage de 0.

Position de la courbe par rapport à la tangente



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de T.

2. Magasin de vélos : probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance

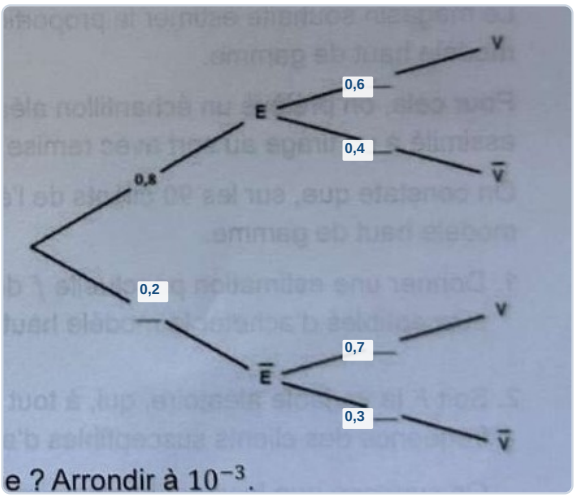
Un magasin de vélos étudie les ventes consécutives au prêt de vélos électriques ou mécaniques, puis le nombre de réparations nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre. Il utilise également un échantillon de clients pour estimer la proportion de personnes susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté et l'issue du prêt, vente ou absence de vente.

La première bifurcation distingue les vélos électriques et mécaniques. Sur chaque branche, la probabilité de vente est suivie de celle de son contraire. Les probabilités conditionnelles de vente sont données dans l'énoncé ; les probabilités d'absence de vente se calculent par complément à 1.

Arbre pondéré complété



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Électrique : 0,8 ; mécanique : 0,2. Après électrique : vente 0,6, pas de vente 0,4. Après mécanique : vente 0,7, pas de vente 0,3.

Question 2. Déterminer la probabilité P(E ∩ V) que le vélo prêté soit électrique et que le prêt débouche sur une vente.

Le parcours correspondant à l'événement « vélo électrique et vente » consiste à suivre d'abord la branche électrique, puis la branche vente. La probabilité de ce parcours est le produit de la probabilité d'obtenir un vélo électrique par la probabilité conditionnelle de vente : $P(E \cap V) = P(E) \times P_E(V) = 0,8 \times 0,6$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(E \cap V) = 0,48$.

Question 3. **Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.**

Les deux issues menant à une vente sont disjointes : prêt d'un vélo électrique suivi d'une vente, ou prêt d'un vélo mécanique suivi d'une vente. On additionne donc leurs probabilités, calculées comme des produits le long de l'arbre :

1. Vélo électrique : $0,8 \times 0,6 = 0,48$.
2. Vélo mécanique : $0,2 \times 0,7 = 0,14$.

Ainsi, $P(V) = 0,48 + 0,14 = 0,62$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(V) = 0,62$.

Question 4. **Sachant que le prêt d'un vélo a débouché sur une vente, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique et arrondir à 10^{-3}.**

Par définition d'une probabilité conditionnelle, la probabilité qu'un vélo soit électrique sachant que le prêt a abouti à une vente vaut $P_V(E) = \dfrac{P(E \cap V)}{P(V)}$. Les probabilités précédentes donnent $P_V(E) = \dfrac{0,48}{0,62}$. On arrondit le quotient au millième, comme demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_V(E) \approx 0,774$.

Partie B - Loi binomiale

Question 1. **Donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X, qui compte parmi 80 vélos réparés ceux dont la réparation nécessite moins d'une heure de main-d'œuvre.**

Chaque réparation est une épreuve de Bernoulli : le succès est « réparation nécessitant moins d'une heure », de probabilité $0,62$. Les 80 réparations constituent les épreuves de l'expérience. Ainsi, le nombre X de succès suit une loi binomiale de paramètres :

Paramètre	Valeur
Nombre d'épreuves	80
Probabilité de succès	0,62

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(80; 0,62)$.

Question 2. **Déterminer la probabilité P(X = 40) et arrondir à 10^{-3}.**

Pour une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,62$, la probabilité d'obtenir exactement 40 réparations de moins d'une heure est $P(X = 40) = \binom{80}{40}(0,62)^{40}(1 - 0,62)^{40}$. L'évaluation donne environ $0,00827$, soit $0,008$ au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 40) \approx 0,008$.

Question 3. **Déterminer la probabilité que le nombre de vélos nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre soit strictement supérieur au nombre de vélos nécessitant plus d'une heure, puis arrondir à 10^{-3}.**

Si X réparations nécessitent moins d'une heure, les $80 - X$ autres nécessitent plus d'une heure. La condition demandée devient donc $X > 80 - X$, soit $X \geq 41$. On additionne alors les probabilités binomiales de 41 à 80 ; la probabilité obtenue est environ $0,98095$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité recherchée est $0,981$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **À partir des 54 clients sur 90 susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.**

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. Parmi les 90 clients interrogés, 54 sont susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme. On calcule donc $f = \dfrac{54}{90} = 0,6$, soit une fréquence observée de 60 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = 0,6$, soit 60 %.

Question 2. a. **En utilisant la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % pour la proportion p.**

On applique la formule fournie avec $f = 0,6$ et $n = 90$. La marge d'erreur vaut $1,96\sqrt{\dfrac{0,6(1 - 0,6)}{90}} \approx 0,1012$. Les bornes de l'intervalle sont donc :

Borne	Calcul	Valeur arrondie
Inférieure	$0,6 - 0,1012$	0,499
Supérieure	$0,6 + 0,1012$	0,701

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,499\ ;\ 0,701]$.

Question 2. b. **Dire si l'on est certain que la proportion p appartient à l'intervalle de confiance obtenu.**

Un intervalle de confiance à 95 % ne garantit pas que la proportion réelle appartienne à l'intervalle calculé à partir de cet échantillon. Le niveau de 95 % concerne la méthode : en répétant le prélèvement et la construction de l'intervalle, environ 95 % des intervalles obtenus contiendraient la proportion réelle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non, on n'en est pas certain.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2023, porte le code 23MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est de 2, sauf pour Traitement des matériaux, où il est de 3. Les deux exercices étudient la fermeture d'un tiroir par une fonction exponentielle, puis les probabilités d'un magasin de vélos, la loi binomiale et l'intervalle de confiance, en mobilisant calcul, modélisation et interprétation.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y'' + 5y' + 4y = 0, résoudre l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- La probabilité d'une vente se calcule en additionnant les probabilités des deux branches : $P(V) = P(E \cap V) + P(\bar{E} \cap V)$.
- Un comptage de succès indépendants de probabilité p sur n essais suit une loi binomiale B(n ; p).
- L'intervalle de confiance fourni à 95 % est $f \pm 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : f(t) est une distance en centimètres et t un temps en secondes.
- Dans l'arbre pondéré, distinguer les probabilités des branches initiales des probabilités conditionnelles.
- Traduire la comparaison des réparations par $X > 80 - X$, soit $X > 40$.
- L'intervalle de confiance au niveau 95 % ne signifie pas que la proportion réelle y appartient avec certitude.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer si le tiroir est fermé avant quatre secondes ?

Comparez la distance f(4) au seuil de 0,5 cm. Comme f est décroissante, si f(4) est inférieure à 0,5 cm, le seuil a été franchi avant quatre secondes. La comparaison doit tenir compte du caractère strict de la condition.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un vélo électrique prêté mène à une vente ?

Multipliez la probabilité qu'un vélo soit électrique par la probabilité conditionnelle d'une vente sachant qu'il est électrique. Ici, le calcul correspond à P(E) × P(V sachant E), soit 0,80 × 0,60.

Q : Comment traduire la comparaison des durées de réparation dans l'échantillon ?

Si X réparations nécessitent moins d'une heure, les autres, soit 80 − X, en nécessitent plus d'une heure. La condition demandée est $X > 80 - X$, ce qui équivaut à $X > 40$.

Q : L'intervalle de confiance garantit-il que la proportion réelle est dans l'intervalle calculé ?

Non. Pour cet échantillon, l'intervalle ne garantit pas que la proportion réelle y figure. Le niveau de confiance de 95 % signifie que, dans des échantillonnages répétés, environ 95 % des intervalles construits par cette méthode contiendraient la proportion réelle.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsol.fr/assets/annales/bts-ol/E2 - Mathématiques/2023/BTS OL - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Opticien Lunetier : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.